

Programowanie liniowe.

Poniższe zadania zaproponowała dr Dorota Ciołek.

Zadanie 1 (A.C. Chiang „Podstawy ekonomii matematycznej”, PWE, Warszawa 1994)

Zakład złożony z trzech zakładów produkcyjnych, w których odbywa się krojenie, mieszanie i paczkowanie, produkuje dwa rodzaje herbaty: I i II. Maszyny w każdym wydziale mogą pracować po 8 godzin dziennie. Proces produkcji można w skrócie opisać w następujący sposób: Pierwszy rodzaj herbaty najpierw jest krojony, a potem paczkowany. Wytworzenie każdej tony tej herbaty zajmuje $\frac{1}{2}$ godziny krojenia i $\frac{1}{3}$ godziny paczkowania. Herbata drugiego rodzaju jest najpierw mieszana, a następnie paczkowana. Na każdą tonę tej herbaty przypada 1 godzina mieszania i $\frac{2}{3}$ godziny paczkowania. Herbata pierwsza może być sprzedawana za 800 \$ za tonę, natomiast herbata druga za 600 \$ za tonę.

- 1) Zbudować model matematyczny zagadnienia.
- 2) Jaki poziom produkcji obu wyrobów powinna ustalić firma, jeśli jej celem jest maksymalizacja całkowitego przychodu?

Zadanie 2 (A.C. Chiang „Podstawy ekonomii matematycznej”, PWE, Warszawa 1994)

Pewna osoba, aby zachować dobre zdrowie, musi przyjmować w codziennym pożywieniu określone ilości substancji odżywczych. Przyjmijmy, że są to trzy typy substancji: wapń, proteiny i witamina A. Załóżmy, że dieta tej osoby składa się z dwóch rodzajów żywności I i II, których ceny i zawartości składników odżywczych podano w tabeli. Określone zostało również minimalne dzienne zapotrzebowanie na poszczególne składniki.

Cena	Żywność I	Żywność II	Minimalne dzienne zapotrzebowa nie
	kg	l	
	0,6 \$	1,00 \$	
Wapń	10	4	20
Proteiny	5	5	20
Witamina A	2	6	12

- 1) Zbudować model matematyczny zagadnienia.
- 2) Jaka kombinacja dwóch rodzajów żywności będzie zaspokajała dzienne zapotrzebowanie na substancje odżywcze najmniejszym kosztem?

Zadanie 3 (K. Kukula [red], „Badania operacyjne w przykładach i zadaniach”, PWN, Warszawa 1996)

Fabryka celulozy i papieru otrzymała zamówienie na wykonanie 150 zwojów papieru o szerokości 105 cm, 200 zwojów papieru o szerokości 75 cm i 150 zwojów papieru o szerokości 35 cm. Jako surowiec zostanie użyty papier zrolowany o szerokości 2 m. W jaki sposób fabryka ma zrealizować zamówienia, przy założeniu, że w procesie cięcia papieru odpad będzie jak najmniejszy?

Zadanie 4 (K. Kukula [red], „Badania operacyjne w przykładach i zadaniach”, PWN, Warszawa 1996)

Przedsiębiorstwo produkcyjne wytwarza dwa wyroby: I i II z surowca dostarczanego w postaci czterech rodzajów kształtek: A, B, C, D. Tablica zawiera liczby możliwych do uzyskania z jednej kształtki wyrobów oraz odpad w kg. Zaproponować strukturę zakupu kształtek potrzebnych do wytworzenia co najmniej 1000 szt. Wyrobu I oraz co najmniej 2000 szt. wyrobu II, minimalizując koszt odpadów (po odliczeniu sum uzyskanych ze sprzedaży odpadów na złom, koszt jednego kg odpadu wynosi 2,5 zł). Określić wartość minimalnego odpadu.

Wyroby	Kształtki			
	A	B	C	D
I	3	2	4	0
II	1	5	0	5
Odpady (w kg)	0,8	1,2	0,6	0,9

Zadanie 5

Fabryka produkuje dwa artykuły A i B. Do produkcji tych artykułów potrzebna jest praca specjalistycznej maszyny, pewne ilości surowca oraz praca ludzi. Maszyna może pracować 4 godziny w ciągu dnia, natomiast wszyscy pracownicy łącznie mogą pracować 8 godzin w ciągu dnia. Wiadomo również, że w ciągu tego dnia fabryka dysponuje zasobami środka produkcji w wysokości 3 jednostki. Tablica podaje zużycie poszczególnych czynników produkcji potrzebne do wytworzenia jednej jednostki produktu. Znane są jednostkowe zyski ze sprzedaży obu artykułów: A – 2 zł oraz B-5 zł.

Czynniki produkcji	Zużycie czynników na jednostkę produkcji	
	A	B
Maszyna	1	0
Praca	1	2
Środek produkcji	0	1

Należy zbudować model matematyczny zagadnienia i rozwiązać przy użyciu metody graficznej

Zadanie 6 (K. Kukula [red], „Badania operacyjne w przykładach i zadaniach”, PWN, Warszawa 1996)

Dziecko w pewnym wieku potrzebuje dziennie co najmniej 120 jednostek witaminy A, 60 jednostek witaminy D, 36 jednostek witaminy C oraz 180 jednostek witaminy E. Witaminy te zawarte są w dwóch produktach $P1$ i $P2$. Ze względu na uboczne szkodliwe działanie witaminy A należy dostarczyć jej co najwyżej 240 jednostek. Zawartość poszczególnych witamin w jednostce produktu oraz ceny jednostkowe produktów podane są w tablicy.

	$P1$	$P2$
A	6	3
D	1	3
C	9	1
E	6	6
Cena	120	180

Ile należy zakupić produktu $P1$ i $P2$, aby dostarczyć dziecku witamin w wymaganych ilościach przy minimalnym koszcie zakupu produktów $P1$ i $P2$?

1. Zbudować model matematyczny zagadnienia.
2. Rozwiązać go metodą graficzną.

Zadanie 7 (K. Kukula [red], „Badania operacyjne w przykładach i zadaniach”, PWN, Warszawa 1996)

Rafineria ropy naftowej typu paliwowo-olejowego zakupuje do przerobu dwa gatunki ropy $R1$ i $R2$, w cenach odpowiednio 7000 i 14000 zł za jednostkę przerobową. Wycinkowy proces technologiczny odbywający się w wieży rektyfikacyjnej daje trzy produkty. Z jednostki przerobowej ropy $R1$ otrzymuje się 16 hl benzyny, 20hl oleju napędowego i 24 hl pozostałości. Z jednostki przerobowej $R2$ otrzymuje się 48 hl benzyny, 10 hl oleju napędowego i 14 hl pozostałości. Ile należy zakupić ropy $R1$ oraz $R2$, aby wyprodukować co najmniej 48000 hl benzyny oraz 20000 hl oleju napędowego przy minimalnym koszcie nabycia surowca?

Należy także wziąć pod uwagę fakt, że zdolność przerobowa wieży rektyfikacyjnej mierzona łączną objętością wszystkich produktów wynosi 144000hl.

1. Zbudować model matematyczny zagadnienia.
2. Rozwiązać go metodą graficzną.

Zadanie 8 (A.C. Chiang „Podstawy ekonomii matematycznej”, PWE, Warszawa 1994)

Lokalna firma planuje reklamowanie pewnego towaru w ciągu określonego tygodnia w radiu i telewizji (w obu mediach równocześnie). Przeznaczyła na ten cel maksymalny budżet w wysokości 16000 dolarów. 30-sekundowa reklamówka radiowa (oznaczymy ją symbolem x_1) kosztuje 800 dolarów, a minimalny kontrakt obejmuje pięciokrotne nadawanie. Reklamy telewizyjne (oznaczymy je symbolem x_2) kosztują 4000 dolarów. W wybranym tygodniu wolne są jeszcze tylko cztery odcinki reklam telewizyjnych. Ocenia się, że ze względu na wielkość audytorium i inne czynniki, reklama telewizyjna jest sześciokrotnie efektywniejsza niż reklama radiowa. Jak firma powinna zaplanować kampanię reklamową, aby dotrzeć do największej liczby potencjalnych odbiorców? Zapisz matematyczny model opisanej sytuacji decyzyjnej.

Zadanie 9 (z propozycji dr Lecha Kujawskiego)

Przedsiębiorstwo zajmuje się sprzedażą pomarańczy i produkcją soku pomarańczowego. Pomarańcze sprzedawane są w woreczkach, sok pomarańczowy w kartonikach. W przedsiębiorstwie dokonuje się również oceny jakości pomarańczy, skala ocen wynosi od 1 (najniższa jakość) do 10 (najwyższa jakość). W chwili obecnej przedsiębiorstwo posiada 100 ton pomarańczy ocenionych na 9 punktów i 120 ton pomarańczy ocenionych na 6 punktów. Wewnętrzne normy jakości przewidują, że przeciętna jakość pomarańczy sprzedawanych w woreczkach musi wynosić co najmniej 7 punktów, natomiast przeciętna jakość pomarańczy używanych do produkcji soku musi wynosić co najmniej 8. Przedsiębiorstwu udaje się uzyskać 3 zł za sok wytworzony z kilograma pomarańczy, natomiast koszty przerobu szacuje się na 2,1 zł na każdy kilogram. Za kilogram pomarańczy w workach przedsiębiorstwo otrzymuje 2 zł, koszty pakowania, sortowania, przechowywania szacuje się na 1 zł za kilogram. Sformułuj odpowiedni model zagadnienia liniowego maksymalizującego zysk ze sprzedaży.

Zadanie 10

Produkty A i B służące jako pasza dla trzody chlewnej zawierają dwa składniki odżywcze M1 i M2, które należy dostarczyć zwierzętom w pewnych z góry ustalonych ilościach. Produkty te zawierają ponadto pewne ilości składnika M3, którego nadmierna ilość w spożywanej paszy może być szkodliwa. Odpowiednie dane zawiera tablica:

	Zawartości składnika w produktach		
	A	B	
M1	9	3	co najmniej 45
M2	1	4	co najmniej 16
M3	2	2	nie więcej niż 20
Ceny jednostkowe	20	40	

W jakich ilościach należy wymieszać dwa produkty, aby otrzymać mieszankę o minimalnym koszcie?

Zadanie 11 (z zadań zaproponowanych przez prof. P. Miłobędzkiego)

Zamierzasz otworzyć wytwórnię słodczy. Rozważasz w niej produkcję dwóch rodzajów cukierków (A i B), do której używa się cukru, orzeszków i czekolady. W chwili obecnej posiadasz zapas 100 kg cukru, 20 kg orzeszków oraz 30 kg czekolady. Masa, z której formuje się cukierki typu A musi zawierać co najmniej 20% orzeszków, natomiast masa, z której formuje się cukierki typu B musi składać się z co najmniej 10% orzeszków i 10% czekolady. Zapisz i rozwiąż odpowiednie zagadnienie programowania liniowego wiedząc, że sprzedaż 1 kg cukierków typu A zapewni C i 2,5 zł zysku, a sprzedaż 1 kg cukierków typu B – 2 zł zysku. Za kryterium optymalności przyjmij łączny zysk ze sprzedaży (produkcji) obu rodzajów cukierków.

Zadanie 12

Żeliwo maszynowe wytwarzane z trzech stopów powinno zawierać odpowiednio: C – najwyżej 14%, Si – nie więcej niż 8%, Mn – co najmniej 25 % i P – co najmniej 12%. Zawartości procentowe pierwiastków w poszczególnych stopach oraz koszt zakupu jednej tony każdego z nich zawiera tablica. Zminimalizować koszt wytworzenia 3000 t żeliwa maszynowego.

Stopy	Pierwiastek				Cena (w zł)
	C	Si	Mn	P	
I	28	10	30	10	200
II	14	12	20	10	100
III	10	6	30	15	400

Zadanie 13 (z zadań zaproponowanych przez prof. P. Miłobędzkiego)

Zakład oczyszczania miasta w Gdyni usuwa z jej terenu trujące odpadki organiczne i nieorganiczne, poddaje je działaniu detergentu neutralizującego ich szkodliwe oddziaływanie na środowisko oraz spala pozostałości tego procesu w specjalnie do tego celu zaprojektowanej instalacji. Pracownicy zakładu ustalili, że przeróbka kilograma odpadków organicznych kosztuje 2 złote, a przeróbka kilograma odpadków nieorganicznych – 3 złote. W zakładzie można przerobić w ciągu tygodnia do 9 milionów kilogramów odpadków. W wyniku spalania pozostałości po przerobionych odpadkach powstaje gruboziarnisty popiół i pewien produkt mineralny. Każdy z nich jest mieszaniną składników organicznych i nieorganicznych, której proporcje zależą od ustawienia procesu technologicznego. Nabywcą popiołu jest producent nawozów sztucznych, a nabywcą produktu mineralnego – producent proszku do prania. Ten pierwszy kupuje tygodniowo do 7 milionów kilogramów popiołu, płacąc po 4 złote za jego kilogram, ten drugi zaś – do 6 milionów kilogramów produktu mineralnego, płacąc po 5 złotych za jego kilogram. Producent nawozów sztucznych wymaga, aby zawartość składników organicznych w popiele nie przekraczała 60% jego wagi. Producent proszku do prania żąda natomiast, żeby zawartość składników nieorganicznych w produkcie mineralnym stanowiła przynajmniej 50% i nie więcej niż 75% jego wagi. Będąc kierownikiem zakładu określ takie wielkości produkcji popiołu i produktu mineralnego (składników organicznych i nieorganicznych zawartych w każdym z nich), przy których zysk przedsiębiorstwa jest największy. Jak zmieniają się optymalne wielkości produkcji, jeśli producent nawozów sztucznych dodatkowo ustali swoje minimalne tygodniowe zapotrzebowanie na popiół na poziomie nie mniejszym od 4 milionów kilogramów?